به‌نام خدا

راه‌حل مسابقه‌ی بین‌المللی ریاضیات کانگورو ۱۳۹۶
پایه‌های نهم (دوره‌ی متوسطه‌ی اول)
و دهم (دوره‌ی متوسطه‌ی دوم)

راه‌حل مسئله‌های سه امتیازی

۱. (۲)

	۲۰۳۹	
۲۰۲۰		۱۹
۲۰۱۷	۳	۱۶

۲. (۵)

۳. (۲)

$$۱۶ - ۹ + ۴ - ۱ = ۱۰ \text{ cm}^۲$$

۴. (۳) فرض کنید x تعداد تیله‌هایی است که مریم باید به هرکدام از خواهرهایش بدهد. در این صورت

$$۲۴ - ۳x = ۱۲ + x$$

و در نتیجه $x = ۳$.

۵. (۵)

۶. (۳)

$$۱ + ۱ + ۴ + ۷ = ۱۳$$

۷. (۵) محیط دایره ۲π است؛ پس وقتی به L می‌رسد، ۵٫۵ دور چرخیده است.

۸. (۳)

$$\frac{۹ + ۵}{۱۵ + ۵} = \frac{۷۰}{۱۰۰}$$

۹. (۱)

$$\left(۱ - \frac{۳}{۷}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۸}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۱۰. (۳) اصل لانه‌ی کبوتری را به یاد بیاورید!

راه‌حل مسئله‌های چهار امتیازی

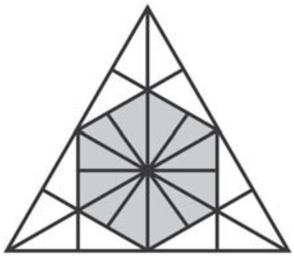
۱۱. (۳) فرض کنید h ارتفاع ذوزنقه است و x طول AE. در این صورت

$$\frac{۱}{۲}hx = \frac{۱}{۲}(۲۰ + ۵۰ - x)h$$

و در نتیجه $x = ۳۵$.

۱۲. (۵) باید $A < ۱۰۰۰$ و $A + ۲۰ \geq ۱۰۰۰$، یا $A < ۱۰۰۰۰$ و $A+۲۰ \geq ۱۰۰۰۰$؛ پس $۹۸۰ \leq A < ۱۰۰۰$ یا $۹۹۸۰ \leq A < ۱۰۰۰۰$.

۱۳. (۴) توجه کنید که همه‌ی مثلث‌های کوچک با هم هم‌نهشت‌اند.



۱۴. (۳) فرض کنید عدد وسطی x است. در این صورت

$$(x-۱)^۲ + x^۲ + (x+۱)^۲ = ۷۷۰$$
$$۳x^۲ + ۲ = ۷۷۰$$
$$x^۲ = ۲۵۶$$
$$x = ۱۶$$

۱۵. (۲) فرض کنید a، b و c به ترتیب محیط A، B و C باشد. در این صورت

$$۵a = ۴b, \quad ۷c = ۶b, \quad c = ۳۰\,\mathrm{cm}$$

پس $b = ۳۵\,\mathrm{cm}$ و $a = ۲۸\,\mathrm{cm}$.

۱۶. (۲)

۱۷. (۱) فرض کنید x و y و z و t به ترتیب قد حمید، قد حامد، قد محمد و قد محمود هستند. در این صورت

$$y - x = x - z = z - t\,,\ x = ۱۸۴,\ \frac{x+y+z+t}{۴} = ۱۷۸$$

چون $y + z = ۲x$، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۳ \times ۱۸۴ + t}{۴} = ۱۷۸$$

و در نتیجه $t = ۱۶۰\ \mathrm{cm}$.

۱۸. (۳) در هر روز حداکثر یک بار باران باریده است. فرض کنید $R_۱$ و $R_۲$ و S به ترتیب تعداد روزهای با صبح بارانی و با عصر بارانی و کلاً آفتابی هستند. در این صورت

$$R_۱ + R_۲ = ۷,\quad R_۲ + S = ۵,\quad R_۱ + S = ۶$$

و در نتیجه $R_۱ + R_۲ + S = ۹$.

۱۹. (۴) می‌دانیم که $a + ۳ = b + ۲$ و $x + b = a + ۱$؛ پس $x = ۰$.

۱	a	۳
x	b	۲

جدول زیر، مستقل از تعداد خانه‌ی وسطی، در شرط مسئله صدق می‌کند.

۱	۰	۳
۳		۱
۰	۱	۲

۲۰. (۱) توجه کنید که زوج و فرد بودن a و c و e و g مثل هم و زوج و فرد بودن b و d و f مثل هم است و در نتیجه، زوج و فرد بودن d و حاصل‌جمع مثل هم است؛ پس اگر بخواهیم حاصل‌جمع ۲۰۱۷ بشود باید b و d و f فرد باشند. اگر یکی از c یا e برابر ۲۸۶ باشند، حاصل‌جمع نمی‌تواند از

$$۷ \times ۲۸۶ + (۲ + ۱ + ۰ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴) = ۲۰۱۵$$

بزرگ‌تر باشد و در نتیجه، چیزی غیر از a یا g نمی‌تواند برابر ۲۸۶ باشد. عددهای

$$۲۸۶, ۲۸۷, ۲۸۸, ۲۸۹, ۲۹۰, ۲۸۹, ۲۸۸$$

در شرط مسئله صدق می‌کنند.

راه‌حل مسئله‌های پنج امتیازی

۲۱. (۴) توجه کنید که $۸۸۲ = ۲ \times ۳^{۲} \times ۷^{۲}$. با کمی بررسی معلوم می‌شود که تنها چهار عدد ممکن با شرایط مسئله عبارت‌اند از ۱، ۷، ۹ و ۱۴.

۲۲. (۵)

$$\frac{۲ \times ۲ \times ۳}{۶ \times ۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲۳. (۳) فرض کنید x عدد دورقمی اولیه است. در این صورت، عدد شش‌رقمی برابر است با $۱۰۱۰۱x$، که بر ۷ بخش‌پذیر است.

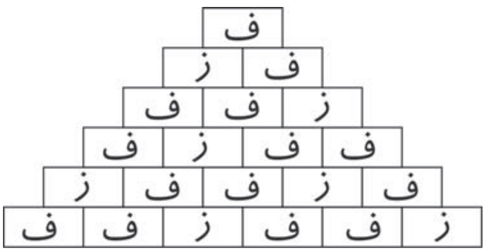
۲۴. (۵) باید ۷ را به‌صورت حاصل‌جمع رقم‌های متمایز بنویسیم:

تعداد عددهای تشکیل شده از رقم ۷: ۱

تعداد عددهای تشکیل شده از رقم‌های ۱ و ۶، یا ۲ و ۵، یا ۳ و ۴: ۲×۳

تعداد عددهای تشکیل شده از رقم‌های ۱ و ۲ و ۴: ۶

۲۵. (۲) بجز در ردیف پایین، هر عدد فرد حاصل‌جمع یک عدد فرد و یک عدد زوج است؛ پس تعداد عددهای فرد از دوسوم کل عددها بیش‌تر نیست. در شکل زیر، مثالی از چینش با ۱۴ عدد فرد آورده‌ایم.



۲۶. (۵) کوچک‌ترین مضرب ۱۸۰° که از ۲۰۱۷° بزرگ‌تر است برابر است با ۲۱۶۰°؛ پس زاویه‌ی فراموش شده برابر است با ۱۴۳°.

۲۷. (۱)

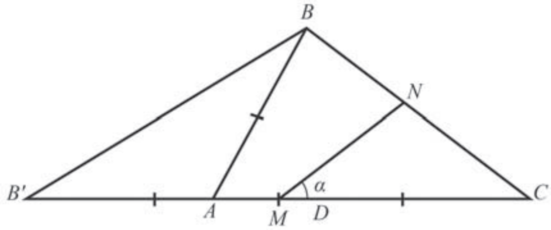
۲۸. (۲)

۲۹. (۴) توجه کنید که $MA = MB$؛ به این ترتیب، باید

$$PM^{۲} = PB^{۲} + MB^{۲}$$
$$(PA + MB)^{۲} = (PA + ۶)^{۲} + MB^{۲}$$
$$PA \times MB = ۶PA + ۱۸$$
$$MB = ۶ + \frac{۱۸}{PA}$$

پس PA باید مقسوم‌علیه ۱۸ باشد.

۳۰. (۱) پاره‌خط AC را از A به اندازه‌ی AB امتداد می‌دهیم.



چون $DC = AB = AB'$ و $AM = MD$، M وسط $B'C$ است و در نتیجه NM با BB' موازی است؛ پس $\angle BB'A = \angle NMC = \alpha$. مثلث ABB' متساوی‌الساقین است؛ پس $\angle ABB'$ هم برابر α است و در نتیجه، $\angle BAC$ که زاویه‌ی خارجی مثلث ABB' است برابر است با $\alpha + \alpha$.